



Неуправляемый велосипед может быть устойчивым без гироскопического или стабилизирующего действия

Я. Д. Г. Куйман, Я. П. Мейярд,
Дж. М. Пападопулос, Э. Руина, А. Л. Шваб

Велосипед без велосипедиста может осуществлять самостоятельное движение, не совершая падений. Согласно общепринятой точке зрения, такая устойчивость является или следствием гироскопической перцессии переднего колеса, или следствием того, что точка контакта переднего колеса находится позади точки пересечения оси поворота руля с опорной плоскостью. Мы показали, что для устойчивости неуправляемого велосипеда эти эффекты не нужны. Пользуясь вычислениями линеаризованной устойчивости, мы сконструировали велосипед с дополнительными колесами, вращающимися в обратную сторону и исключающими гироскопический эффект (кинетический момент колеса), а точка контакта переднего колеса находится перед осью поворота руля (отрицательный вынос руля). При отклонении от прямолинейного движения катящийся велосипед автоматически возвращается к вертикальному положению. Наши результаты показывают, что различные проектные параметры, такие как расположение передней массы и наклон оси поворота руля, способствуют устойчивости в совокупности взаимодействующих параметров.

J. D. G. Kooijman, J. P. Meijaard, Jim M. Padopoulos, Andy Ruina, A. L. Schwab, *A bicycle can be self-stable without gyroscopic or caster effects*. Science Magazine, 2011, vol. 332, no. 6027, pp. 339–342, doi:10.1126/science.1201959. Перевод с английского Е. Н. Пивоваровой.

Я. Д. Г. Куйман
Delft University of Technology, Delft, The Netherlands

Я. П. Мейярд
University of Twente, Enschede, The Netherlands

Дж. М. Пападопулос
UW-Stout, Menomonie, WI 54751, USA,

Э. Руина
Cornell University, Ithaca, NY 14853, USA,

А. Л. Шваб
Delft University of Technology, Delft, The Netherlands

Чтобы не упасть, велосипедист управляет велосипедом при помощи руля. Обычно для удержания равновесия человек поворачивает руль руками. При езде «без рук» на устойчивость также может влиять наклон тела велосипедиста. Удивительно, что многие неуправляемые велосипеды могут управлять сами собой для поддержания равновесия, подобно тому, как велосипедист едет «без рук». К примеру, в 1876 году Спенсером [2, 3] отмечено, что можно кататься на велосипеде, лежа на сиденье «без рук», а в фильме «Праздничный день»¹ Жака Тати показан велосипед, балансирующий без велосипедиста на больших расстояниях. Предполагая, что ездовые качества велосипеда, управляемого велосипедистом, связаны с устойчивостью неуправляемого велосипеда (или по крайней мере с не слишком сильной неустойчивостью), авторы многих теоретических исследований основное внимание уделяют устойчивости неуправляемого велосипеда.

Первые аналитические расчеты устойчивости неуправляемого велосипеда были представлены независимо друг от друга французским математиком Эммануэлем Карвалло [4] (1897) и студентом Кембриджского университета Фрэнсисом Уипплом [3, 5] (1899). В их моделях, как и в этой статье, велосипед определен как трехмерный механизм (рис. 1а), состоящий из четырех твердых тел (задней части рамы, включающей тело наездника B , рулевого узла H и двух колес R и F), соединенных тремя шарнирами. Более полная модель велосипеда Уиппла имеет 25 геометрических и массовых параметров. При условии малых углов наклона и поворота баланс линейного и углового импульсов, ограниченных шарнирами и контактом качения, приводит к системе из двух дифференциальных уравнений второго порядка для углов наклона и поворота [6]. Решения этих уравнений показывают, что при малых возмущениях велосипед может возвращаться к вертикальному прямолинейному движению по экспоненциальному закону (асимптотическая устойчивость). Эту устойчивость, как правило, можно наблюдать при скоростях v , близких к \sqrt{gL} , где g — ускорение свободного падения, L — характеристическая длина (около 1 метра для современных велосипедов). Ограничения в этой модели включают предполагаемую линейность и пренебрежение движениями, связанными с деформацией шины и рамы, скольжением шины, люфтом и трением в шарнирах. Однако современные эксперименты продемонстрировали корректность модели Уиппла для реального велосипеда без наездника [7].

Простая модель велосипеда, упомянутая выше, сохраняет энергию. Таким образом, асимптотическая устойчивость велосипеда (изменение углов наклона и поворота экспоненциально стремится к нулю после колебаний) приводит в недоумение тех, кто знаком с гамильтоновой динамикой. Но вследствие неголономного контакта качения колес велосипед не является гамильтоновой системой (хотя энергия сохраняется), и подмножество переменных может иметь экспоненциальную устойчивость во времени [6, 8]. Между экспоненциальным затуханием и сохранением энергии нет противоречия, потому что для велосипеда потеря энергии от затухающих движений по углам наклона и поворота руля компенсируется увеличением скорости. Несмотря на это, неясно, почему неуправляемый велосипед устойчив. В некотором смысле, возможно, устойчивый неуправляемый велосипед — это нечто, напоминающее систему с управлением, хотя и возложенным на самого себя.

Устойчивость велосипеда, управляемого велосипедистом, несомненно, связана с самоуправляемостью. Эксперименты, подобные тем, что проводили Джоунс [9] и Клейн [10], показывают, что специальные экспериментальные велосипеды, на которых сложно кататься, независимо от того, «с руками» ехать или без, стремятся к потере устойчивости. И управление «без рук» (используя движение тела), и устойчивость неуправляемого велосипеда за-

¹ «Jour de fête» (1949).

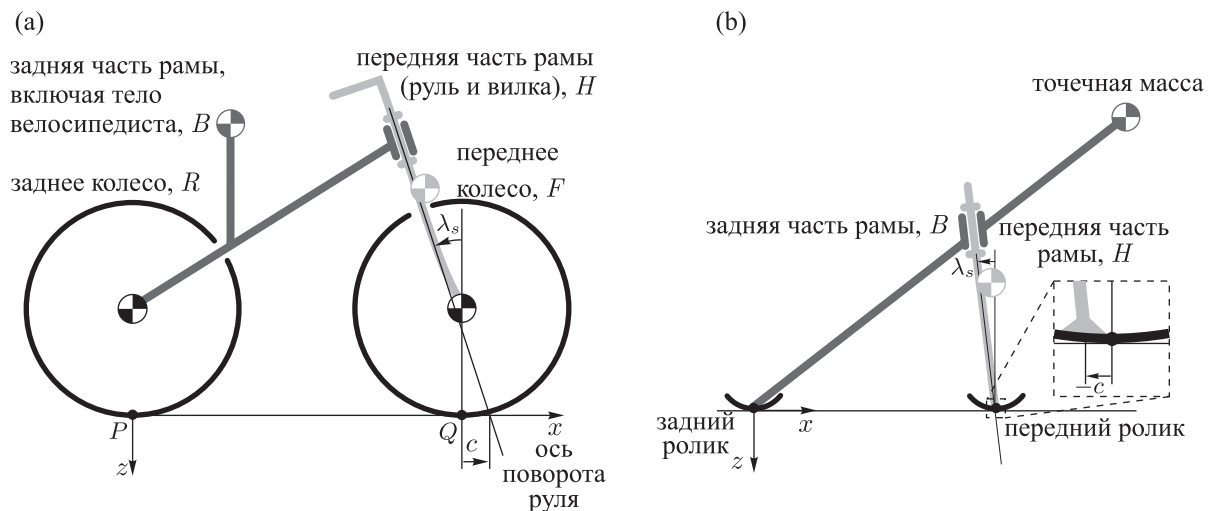


Рис. 1. (а) Модель велосипеда состоит из двух взаимосвязанных частей рамы B и H , соединенных с колесами F и R . Модель в общем имеет 25 геометрических и массовых параметров. Главными здесь являются момент инерции I_{yy} переднего колеса, угол наклона оси поворота руля («наклон») λ_s и вынос вилки c (положительный, если точка Q находится позади точки пересечения продолжения оси поворота руля с опорной плоскостью). В зависимости от значений параметров, таких как ускорение свободного падения g и поступательная скорость v , неуправляемый велосипед может быть либо устойчивым, либо неустойчивым. (б) Теоретическая модель двухмассового роликового велосипеда (TMS — two mass skate) — частный случай, характеризуемый только девятью свободными параметрами (восемь описанных в тексте + вынос). Функцию колес выполняют ролики. Каждая из частей рамы имеет одну точечную массу и не имеет моментов инерции. Тяжелая точечная масса на задней части рамы в точке контакта ролика с опорной плоскостью может предотвратить опрокидывание велосипеда вперед; но так как нет эффектов линейной динамики, это не показано. Даже с отрицательным выносом ($c < 0$) этот негироскопический велосипед может быть устойчивым.

висят от «перекрестных членов» (то есть наклон является причиной поворота, и наоборот). Главный вопрос о причине устойчивости состоит в следующем: что вызывает соответствующую связь между наклоном и поворотом? Что касается эффектов взаимосвязи, то чаще всего рассматриваются те, что возникают в результате действия гироскопического момента переднего колеса и стабилизирующего действия от переднего колеса, движущегося позади поворотной оси. Вынос вилки — это расстояние c , такое, что точка контакта Q находится позади точки пересечения поворотной оси с опорной плоскостью (рис. 1а).

Существует общепринятая точка зрения, что либо вращающий момент (гироскопический момент), либо положительный вынос, либо оба фактора необходимы для устойчивости велосипеда [3]. Эти два эффекта обсуждаются далее, а затем рассматриваются более критично. Активное рулевое управление передним колесом вызывает появление гироскопического момента на раме и на велосипедисте. Так как переднее колесо намного легче, чем велосипед и велосипедист, эффект гироскопического момента при наклоне, как правило, мал [11]. Однако в совокупности с другим фактором, то есть наклоном велосипеда при автоматическом управлении, он не ничтожно мал. Например, когда велосипед наклонен вправо, передняя ось также наклонена вправо, и колесо, вращаясь по часовой стрелке (если смотреть снизу), переносит реактивный крутящий момент, по крайней мере частично, к рулевому узлу. Этот реактивный момент стремится повернуть руль направо. Итак, общее пояснение, касающееся управления велосипедом «без рук»: чтобы повернуть направо,

велосипедист наклоняется влево, отклоняя велосипед и колеса направо [5]. Руль велосипеда, рассматриваемый как свободно вращающийся вокруг поворотной оси и вынужденно вращающийся под действием гироскопического переднего колеса, таким образом, сначала поворачивает направо. Такой вынужденный наклон руля может быть использован велосипедистом для поддержания равновесия. Точно так же гироскопическая связь способствует устойчивости движения неуправляемого велосипеда [12].

Наиболее подробное рассмотрение необходимости гироскопической связи для управления устойчивостью неуправляемого велосипеда приведено в главе о велосипеде четвертого тома трактата о гироскопе Клейна и Зоммерфельда [11]. Они взяли параметры велосипеда из модели Уиппла, исключив только кинетический момент колес. Используя свой собственный анализ линеаризованной динамической устойчивости модели Уиппла, Клейн и Зоммерфельд заключили, что «... в отсутствие гироскопического действия диапазон скоростей полной устойчивости обращается в нуль» [11], и сделали сильное общее утверждение относительно велосипеда [11, с. 866]:

«Гироскопическое действие, несмотря на его малость, необходимо для устойчивости неуправляемого велосипеда».

Клейн и Зоммерфельд подчеркнули, что гироскопический момент не влияет на наклон велосипеда напрямую, как утверждают другие авторы [13]. Скорее, отклонение велосипеда от вертикального положения под действием гироскопического момента вызывает рулевое управление, что, в свою очередь, возвращает велосипед в вертикальное положение [11]: «Соответствующая стабилизирующая сила, которая подавляет силу тяжести, является центробежной силой, а гироскопическое действие играет роль пускателя».

В известной работе Джоунса по неуправляемому велосипеду (URB — *unrideable bicycle*) [9] на рулевой узел добавлен диск, вращающийся в обратную сторону и исключаяющий гироскопический момент переднего колеса. Ехать на таком велосипеде «без рук» весьма затруднительно. Джоунс сделал вывод, что гироскопический эффект, обсуждаемый в [11], никак не связан с наклоном и управляемостью. Джоунс подчеркнул важность расположения точки контакта переднего колеса с землей позади поворотной оси (положительный вынос вилки, $c > 0$, рис. 1). Даже несмотря на то, что вилки современных велосипедов обычно незначительно изогнуты вперед вместе с передней втулкой, все современные велосипеды до сих пор имеют положительный вынос руля (обычно от 2 до 10 см) из-за наклона поворотной оси руля, $\lambda_s > 0$. Когда Джоунс изменил конструкцию велосипеда так, что точка контакта переднего колеса с землей стала находиться перед поворотной осью (отрицательный вынос, $c < 0$), он не смог ехать «без рук».

С точки зрения Джоунса, велосипедное колесо частично напоминает колесико на продуктовой тележке, где оно двигается позади вертикальной поворотной оси. Если современный велосипед катится вперед по прямой линии за счет направления задней части рамы, которая удерживается в строго вертикальном положении, переднее колесо будет быстро самоцентрироваться, как колесико продуктовой тележки. Джоунс отмечает, что «самоцентрирование велосипеда достигается лишь за счет геометрической устойчивости ролика». Особое внимание Джоунс обратил на эффект следования: вертикальные силы контакта с землей, действующие на переднее колесо в точке контакта, создают вращательный момент управляемых колес наклоненного велосипеда, даже когда велосипед движется по прямой линии. Джоунс вычислил момент поворота колеса, являющийся причиной наклона, как производную статической потенциальной энергии, при этом он пренебрег весом переднего узла. Если обычный современный велосипед прочно удерживается задней частью рамы, наклоненной

вправо, и сильно придавлен вниз, то вертикальные силы контакта с землей, действующие на переднее колесо, вызывают справа вращательный момент поворота на руле. Вращательный момент Джоунса может ощущаться при езде на обычном велосипеде по прямой, когда велосипедист наклоняется влево, отклоняя велосипед вправо: чтобы сохранять прямолинейную траекторию, руки должны побороть вращательный момент Джоунса и приложить слева вращательный момент к рулю. Согласно Джоунсу, этот момент поворачивает руль в сторону падения, только когда вынос положительный. Когда вынос равен нулю, теория Джоунса предсказывает отсутствие самокорректирующего вращательного момента. Наконец, Джоунс предположил, что управление «без рук» (возможность добиться устойчивости с помощью движений тела) и устойчивость неуправляемого велосипеда зависят от положительного выноса. Объединение двух механизмов натолкнуло Джоунса на мысль, что вынос является ключевой частью устойчивости велосипеда.

Сторонники вышеописанных идей убеждены, что рулевое управление устойчиво, потому что точка контакта переднего колеса с землей движется позади поворотной оси, а наклон устойчив, потому что некоторые сочетания гироскопических моментов и выноса заставляют неуправляемый велосипед поворачивать в сторону падения [3].

Действительно ли гироскопический вклад и положительный вынос, вместе или по отдельности, необходимы или достаточны для устойчивости велосипеда? Следуя Карвалло, Уипплу, Клейну и Зоммерфельду и другим (см. историческую справку в [6]), мы начали с линеаризованных уравнений движения. Используя численные значения из тестовой модели в [6] и принимая гироскопические моменты равными нулю, мы определили, что устойчивость теряется (аналогичный результат получен Клейном и Зоммерфельдом для параметров Уиппла). Несмотря на это, мы получили и модель велосипеда, которая остается устойчивой без гироскопического вклада.

Противоречие с работой [11] частично заключается в ошибках в знаках в ключевом выражении для устойчивости [3]. Несмотря на ошибки в вычислениях, велосипед Уиппла с его же параметрами действительно теряет устойчивость, когда гироскопический вклад стремится к нулю. Но с неправильными выражениями Клейн и Зоммерфельд могли сделать более общие выводы, которые не справедливы при правильных знаках [3]. Какое бы ни было обобщение намечено Клейном и Зоммерфельдом (их формулировка неоднозначна), их результаты не могут применяться к велосипедам в общем.

Упрощенное вычисление статической энергии Джоунса представляется неполным в случае динамической системы, аналогичной моделям Уиппла и Карвалло. Вычисления статической энергии Джоунса рассчитывают (частично) только один член, $K_{0\delta\phi}$ из полных динамических уравнений [3, 6]. В полном динамическом анализе $K_{0\delta\phi}$ не предсказывает управление падающим велосипедом [3]. Например, этот член может быть ненулевым для велосипеда, который падает совсем без самокорректирующего управления. Аналогично мы можем определить модель велосипеда с нулевым или отрицательным выносом таким образом, что будет наблюдаться устойчивость.

Хотя принята точка зрения, что для устойчивости требуются гироскопический вклад и положительный вынос, мы не нашли никаких строгих выводов о том, что это необходимо. Для лучшего понимания того, что необходимо для устойчивости, мы убрали гироскопический момент и устремили вынос к нулю ($c = 0$). Кроме того, мы уменьшили распределение масс только до двух точек: одна находится на задней части рамы B , другая на поворотном узле H (рис. 1b). С этими теоретическими параметрами колеса не имеют кинетического момента, они механически эквивалентны роликам. Эти упрощения уменьшают число параметров с 25 (как в модели Уиппла) до 8.

Анализ устойчивости этой теоретической модели двухмассового роликового велосипеда, подтвержденный численным решением управляющих дифференциальных уравнений, показывает, что для устойчивости не нужен ни гироскопический вклад, ни положительный вынос руля (анализ Рауса–Гурвица [15] показал, что все собственные значения теоретического двухмассового роликового велосипеда могут иметь отрицательные действительные части при некоторых скоростях движения).

Мы взяли параметры устойчивого теоретического роликового велосипеда как основу для создания экспериментального роликового велосипеда (рис. 2а). Мы использовали маленькие колеса для минимизации кинетического момента. Для дальнейшего уменьшения гироскопического вклада, следуя Джоунсу, мы добавили диски, которые вращаются в обратную сторону относительно нижних колесиков (рис. 2б). Экспериментальный роликовый велосипед был создан с незначительно отрицательным выносом руля ($c = -4 \text{ мм} < 0$). Хотя экспериментальный двухмассовый роликовый велосипед похож на складной самокат, он все-таки является велосипедом (два колеса, две части рамы, три шарнира).

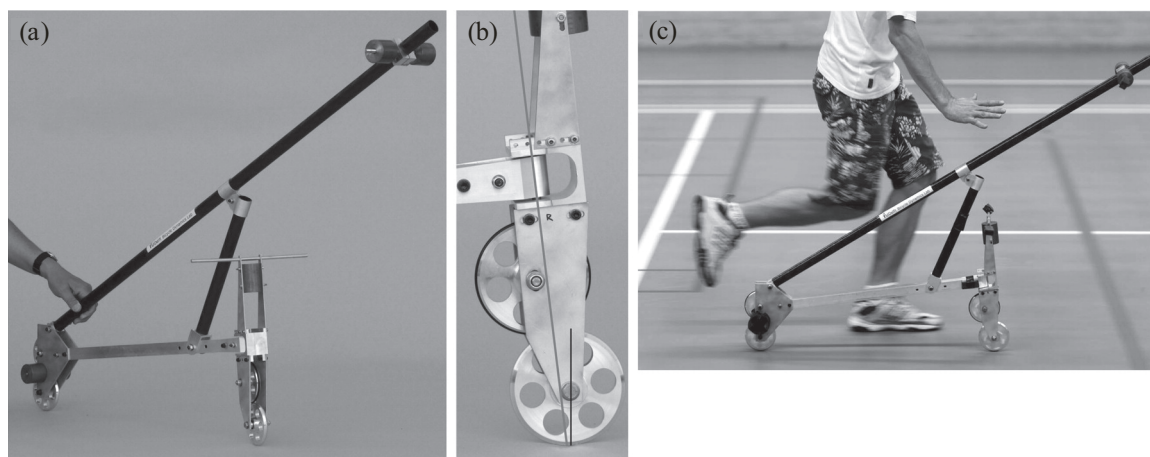


Рис. 2. Реализация модели с рисунка 1б. (а) Экспериментальный двухмассовый роликовый велосипед. (б) Передний узел. Вращающееся в обратную сторону колесо исключает кинетический момент. Точка контакта колеса с плоскостью находится немного впереди точки пересечения продолжения оси поворота руля с опорной плоскостью, демонстрируя малый отрицательный вынос. (с) Качение и устойчивость экспериментальной модели неуправляемого роликового велосипеда.

Поскольку все физические объекты имеют распределенную массу, метрические параметры экспериментального роликового велосипеда немного отличались от таких же в теоретической модели, которая была основана на точечных массах. Используя метрические параметры, мы построили график устойчивости (рис. 3а). Для скорости качения выше 2.3 м/с все собственные числа имеют отрицательные действительные части (устойчивое движение).

Движение велосипеда по инерции при толчке вперед (рис. 2с) остается вертикальным до того, как скорость упадет ниже примерно 2 м/с . При движении медленнее 2 м/с велосипед начинает падать. В эксперименте с возмущением устойчиво движущийся по инерции велосипед ($v > 2.3 \text{ м/с}$) ударяли сбоку по раме, вызывая изменение угла наклона. После удара велосипед возвращался к вертикальному положению.

Были вычислены (телеметрически) значения наклона и отклонения от траектории. Экспериментальные данные сравнили с теоретическими (см. рис. 3б). Разница между экспери-

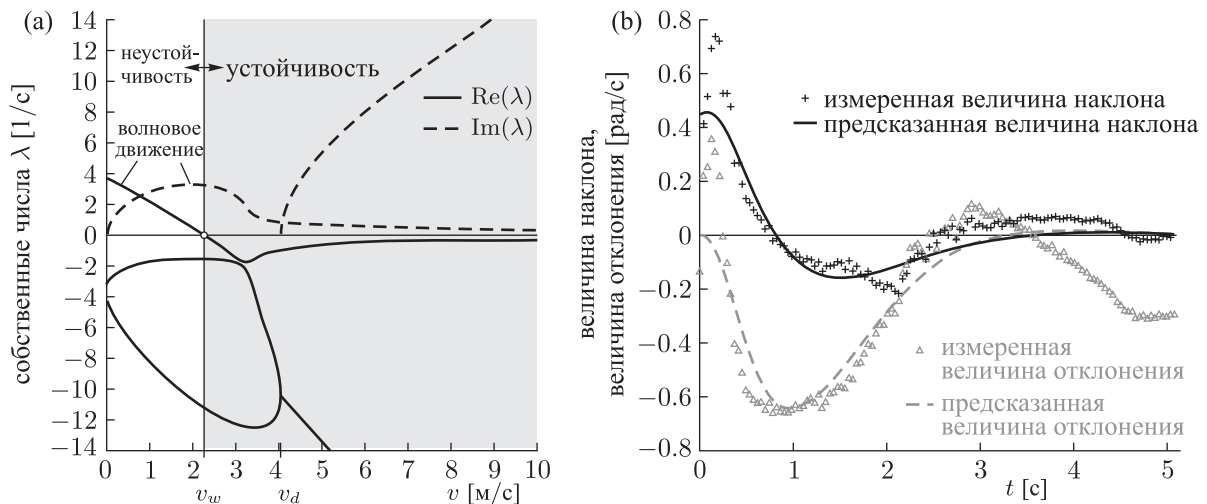


Рис. 3. (а) График устойчивости для экспериментального двухмассового роликового устойчивого велосипеда. Решением дифференциальных уравнений являются экспоненциальные функции, зависящие от времени. Устойчивость соответствует всем таким решениям, имеющим экспоненциальное затухание (предпочтительнее, чем экспоненциальный рост). Такое затухание происходит только при условии, что все четыре собственных числа λ_i (в общем случае это комплексные числа) имеют отрицательную действительную часть. График показывает зависимость собственных чисел от скорости движения v . Для $v > 2.3$ м/с (серая область) действительные части (сплошные линии) всех собственных значений отрицательны (ниже горизонтальной оси), и велосипед устойчив. (б) Неустойчившееся движение после возбуждения для экспериментальной модели роликового велосипеда. Показаны значения измеренных и предсказанных значений наклона и отклонения от направления движения (в кульминации) для задней части рамы. Предсказанное движение показывает теоретическое (осциллирующее) экспоненциальное затухание. На частоте 20 Гц на высокоскоростном видео обнаруживаются колебания (не видны на этих графиках), которые не были предсказаны низкоразмерной линеаризованной моделью.

ментом и теорией заключается в том, что при начальном возмущении колесо испытывает боковое проскальзывание, которое является причиной начального скачка в измерениях отклонения от траектории (треугольники в первые 0.25 с на рис. 3b). Теоретическая модель подразумевает отсутствие проскальзывания. Высокоскоростное видео показывает колебания на частоте 20 Гц, которые обусловлены, по крайней мере частично, немоделированным люфтом оси поворота. Однако после периода скольжения (даже с колебанием) предсказывается корректный массив данных для низкоразмерной линейной модели.

И теоретический анализ, и физический эксперимент показывают, что для устойчивости велосипеда не нужны ни гироскопический момент, ни положительный вынос вилки. Они не являются достаточными. Многие конструкции велосипедов с гироскопическим передним колесом и положительным выносом неустойчивы при любой скорости движения. Более того, всем известно, что велосипеды и мотоциклы теряют устойчивость при высоких скоростях из-за гироскопического вклада (например [6]), а двухмассовый роликовый велосипед не имеет гироскопического момента и, по прогнозам, сохраняет устойчивость при больших скоростях.

Почему же наш экспериментальный роликовый велосипед поворачивает в сторону падения при отсутствии гироскопического момента и положительного выноса? Обычный велосипед представляет собой сложную конструкцию с различными элементами, которые могут быть причиной необходимости наклона для управления. Только некоторые из этих па-

раметров зависят от положительного выноса или от положительного спинового момента импульса в переднем колесе. В теоретической и экспериментальной модели роликового велосипеда передняя масса узла находится перед осью поворота и ниже, чем задняя масса. Когда роликовый велосипед падает, нижняя управляющая масса, под своим собственным весом, падает быстрее, чем верхняя масса рамы, по той же причине, по которой короткий карандаш, балансирующий на конце (перевернутый маятник) падает быстрее, чем высокая метла (медленный перевернутый маятник). Так как части рамы соединены вместе шарнирами, стремление передней управляющей массы упасть быстрее вызывает поворот руля в сторону падения. Важность передней массы для статического момента Джоунса уже отмечалась в работах [8, 16, 17].

Почему этот велосипед обладает определенными характеристиками в определенное время, обеспечивая свою устойчивость? Мы не нашли простого физического объяснения, эквивалентного математическому утверждению, что все собственные числа должны иметь отрицательные действительные части.

Например, поворота в сторону падения не достаточно для обеспечения устойчивости. Для различных возможных простых достаточных условий X для устойчивости мы работали конструкции, которые удовлетворяют X , но неустойчивы. Например, мы нашли велосипеды с гироскопическими колесами и положительным выносом, которые неустойчивы при любых скоростях. Мы также не нашли простых необходимых условий для устойчивости. Помимо конструкций без гироскопа и отрицательного выноса, мы нашли другие общеизвестные контрпримеры. Мы нашли велосипед, который самоуправляем с заднеприводным управлением. Мы также нашли альтернативную теоретическую модель двухмассового роликового велосипеда с отрицательным выносом и отсутствием гироскопического момента, которая в дополнение к этому имеет отрицательный угол наклона оси поворота руля ($\lambda_s < 0$).

Есть ли какие-нибудь простые конструктивные особенности, которые всегда нужны для устойчивости велосипеда? В области наших линеаризованных уравнений мы находим только одно простое необходимое условие:

Чтобы удерживать устойчивость велосипеда при правом повороте, требуется левый закручивающий момент на руле.

Это равносильно тому, что если резко отпустить руль при повороте направо, то первым движением руля будет поворот влево. Это строгая версия более общего (пока не доказанного) утверждения, что устойчивый велосипед должен повернуться в сторону падения.

Другое простое необходимое условие для устойчивости состоит в том, что должен присутствовать хотя бы один из факторов (по крайней мере один из параметров $M_{\delta\phi}$, $C_{\delta\phi}$ или $K_{\delta\phi}$ должен быть ненулевым). Эти условия связи возникают из комбинации выноса, спигового импульса, наклона поворотной оси, расположения центра масс и результата инерции переднего и заднего узлов.

Хотя мы показали, что для устойчивости не нужны ни кинетический момент переднего колеса, ни положительное значение выноса, мы не отрицаем, что эти факторы часто вносят существенный вклад. Но другие параметры также важны, особенно распределение массы переднего узла и все параметры, взаимодействующие сложным образом. Как правило, мы основывались на том, что почти любой самоуправляемый велосипед может стать неустойчивым либо из-за неправильно отрегулированного выноса, либо из-за гироскопического момента переднего колеса, либо из-за положения центра масс переднего узла. Верно и обратное: многие неустойчивые велосипеды могут стать устойчивыми путем подходящей

регулировки одного из этих трех параметров, иногда необычным образом. Эти результаты наводят на мысль, что в процессе эволюционного, поступательного развития, в результате которого появились современные конструкции велосипеда, возможно, еще не были исследованы потенциально полезные области конструирования в пространстве проектных параметров.

Список литературы

- [1] Rankine W. J. M. On the dynamical principles of the motion of velocipedes // Engineer, 1869, vol. 28, pp. 79, 129, 153, 175; 1870, vol. 29, p. 2.
- [2] Spencer C. The modern bicycle. London: Frederick Warne and Co., 1876. P. 23–24.
- [3] Kooijman J. D. G., Meijaard J. P., Papadopoulos J. M., Ruina A., Schwab A. L. A bicycle can be self-stable without gyroscopic or caster effects (supplementary material available online) // Science, 2011, vol. 332, no. 6027, pp. 339–342.
- [4] Carvallo E. Théorie du mouvement du monocycle et de la bicyclette. Paris: Gauthier-Villars, 1899.²
- [5] Whipple F. J. W. The stability of the motion of a bicycle // Q. J. Pure Appl. Math., 1899, vol. 30, pp. 312–348.
- [6] Meijaard J. P., Papadopoulos J. M., Ruina A., Schwab A. L. Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: A benchmark and review // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 2007, vol. 463, no. 2084, pp. 1955–1982.
- [7] Kooijman J. D. G., Schwab A. L., Meijaard J. P. Experimental validation of a model of an uncontrolled bicycle // Multibody Syst. Dyn., 2008, vol. 19, nos. 1–2, pp. 115–132.
- [8] Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. Москва: Наука, Физматлит, 1967. 520 с. [Neimark Ju. I., Fufaev N. A. Dynamics of nonholonomic systems. (Trans. Math. Monogr., vol. 33.) Providence, RI: AMS, 1972.]
- [9] Джоунс Д. Почему устойчив велосипед? // Квант, 1970, № 12, с. 24–30. [Jones D. E. H. The stability of the bicycle // Phys. Today, 1970, vol. 23, no. 4, pp. 34–40 (reprinted in September 2006).]
- [10] Åström K. J., Klein R. E., Lennartsson A. Bicycle dynamics and control, adapted bicycles for education and research // IEEE Control Syst. Mag., 2005, vol. 25, no. 4, pp. 26–47.
- [11] Klein F., Sommerfeld A. Über die Theorie des Kreisels. Leipzig: Teubner, 1910. P. 863–884.
- [12] Griffiths J. A. On the distribution of the wheel load in cycles // Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, 1886, vol. 37, pp. 128–188.
- [13] Thomson W. Popular lectures and addresses: In 3 Vols.: Vol. 1: Constitution of matter. London: Macmillan and Co., 1889. P. 142–146.
- [14] Papadopoulos J. M. Bicycle steering dynamics and self-stability: A summary report on work in progress: Technical report. Cornell Bicycle Research Project, Cornell University, Ithaca, NY, 1987.
- [15] Routh E. J. Stability of a dynamical system with two independent motions // Proc. London Math. Soc., 1873, vol. 1, no. 1, pp. 97–99.
- [16] Collins R. N. A mathematical analysis of the stability of two wheeled vehicles: PhD thesis. University of Wisconsin, Madison, 1963.
- [17] Chateau C. Vélocipédie: De l'aplomb dans les bicycles // La Nature: Revue des sciences et de leurs applications aux arts et à l'industrie, 1892, no. 1014, pp. 353–355.

²(Работа представлена в 1897 году на соискание премии Фурнейрона и получила вторую премию в 1898 году.)

A bicycle can be self-stable without gyroscopic or caster effectsJ. D. G. Kooijman¹, J. P. Meijaard², Jim M. Papadopoulos³, Andy Ruina⁴, A. L. Schwab⁵^{1,5}Delft University of Technology, Delft, The Netherlands,²University of Twente, Enschede, The Netherlands³UW-Stout, Menomonie, WI 54751, USA⁴Cornell University, Ithaca, NY 14853, USA,

A riderless bicycle can automatically steer itself so as to recover from falls. The common view is that this self-steering is caused by gyroscopic precession of the front wheel, or by the wheel contact trailing like a caster behind the steer axis. We show that neither effect is necessary for self-stability. Using linearized stability calculations as a guide, we built a bicycle with extra counter-rotating wheels (canceling the wheel spin angular momentum) and with its front-wheel ground-contact forward of the steer axis (making the trailing distance negative). When laterally disturbed from rolling straight this bicycle automatically recovers to upright travel. Our results show that various design variables, like the front mass location and the steer axis tilt, contribute to stability in complex interacting ways.

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 2, pp. 377–386 (Russian)Originally published in: *Science Magazine*, 2011, vol. 332, no. 6027, pp. 339–342,
doi:10.1126/science.1201959.